

Алгоритм построения доказательства секвенций. (в виде дерева)

В данной работе предлагается алгоритм доказательства секвенций и приводится доказательство его корректности. Используются формальные определения секвенции и правила вывода, данные в работе [1].

Введем функцию $\Delta(\phi)$, определяющую количество *бинарных* связок в булевой формуле ϕ , и функцию $\delta(\phi)$, определяющую общее количество связок в ϕ .

Представим графически секвенцию S как $\Gamma \vdash \phi$ т.е. $\gamma_0 \cdots \gamma_n \vdash \phi$, где γ_i - булевская формула, тогда

$$\Delta(\Gamma) = \sum_{i=1}^n \Delta(\gamma_i) \quad \text{и} \quad \Delta(S) = \Delta(\Gamma) + \Delta(\phi).$$

$$\delta(\Gamma) = \sum_{i=1}^n \delta(\gamma_i) \quad \text{и} \quad \delta(S) = \delta(\Gamma) + \delta(\phi).$$

Отметим несколько замечаний, используемых далее в доказательстве.

1. Если для каждого i будет выполнено $\delta(\gamma_i) \leq 1$ и $\delta(\phi) \leq 1$, то секвенция доказуема только в двух случаях:

- (a) существует γ_i которая есть ϕ ;
- (b) γ_i которая есть не γ_j .

2. Если $\Delta(S) = 0$, но $(\exists \bar{\gamma}) \delta(\bar{\gamma}) > 1$, то

$$\frac{\frac{\frac{\boxed{\Gamma \bar{\gamma}' \vdash \phi}}{\Gamma \bar{\gamma}' \vdash \gamma' \rightarrow \phi} \text{UT, ВВ} \rightarrow}{\boxed{\Gamma \gamma' \vdash \phi}} \quad \Gamma \bar{\gamma}' \vdash \gamma' \quad \text{M.P.}}$$

Доказательство в обратную сторону аналогично.

Рассмотрим теперь произвольную секвенцию S и 8 возможных случаев.

Случай 1. Пусть $\Delta(\phi) = 0$. В силу $\Delta(\Gamma) > 0$ существует γ' , такая, что $\Delta(\gamma') > 0$. Тогда

$$\frac{\frac{\boxed{\Gamma \gamma' \vdash \phi}}{\Gamma \gamma' \bar{\phi} \vdash \gamma'} \text{ВВ} \neg \quad \frac{\Gamma \gamma' \bar{\phi} \vdash \bar{\gamma}' \quad \boxed{\Gamma \bar{\phi} \vdash \bar{\gamma}'}{\text{пер, ут}}}{\Gamma \gamma' \bar{\phi} \vdash \gamma'} \text{пер, ут}$$

Доказательство в обратную сторону аналогично.

Случай 2.

$$\frac{\boxed{\Gamma \vdash \overline{\overline{\phi}}}}{\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \overline{\overline{\phi}})} \text{M.P.} \quad \boxed{\Gamma \vdash \phi}$$

Случай 3.

$$\frac{\boxed{\Gamma \vdash (\phi \wedge \psi)}}{\boxed{\Gamma \vdash \phi} \quad \boxed{\Gamma \vdash \psi}} \text{B}\wedge$$

Случай 4.

$$\frac{\boxed{\Gamma \vdash (\phi \wedge \psi)}}{\Gamma \vdash ((\phi \rightarrow \overline{\psi}) \rightarrow (\phi \wedge \psi))} \text{M.P.} \quad \boxed{\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \overline{\psi})}$$

Случай 5.

$$\frac{\boxed{\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)}}{\boxed{\Gamma \vdash \psi}} \text{B}\rightarrow$$

Случай 6.

$$\frac{\boxed{\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)}}{\Gamma \vdash ((\phi \wedge \overline{\psi}) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))} \text{M.P.} \quad \boxed{\Gamma \vdash (\phi \wedge \overline{\psi})}$$

Случай 7.

$$\frac{\boxed{\Gamma \vdash (\phi \vee \psi)}}{\Gamma \vdash ((\overline{\phi} \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \vee \psi))} \text{M.P.} \quad \boxed{\Gamma \vdash (\overline{\phi} \rightarrow \psi)}$$

Случай 8.

$$\frac{\boxed{\Gamma \vdash (\overline{\phi} \vee \psi)}}{\Gamma \vdash ((\overline{\phi} \wedge \overline{\psi}) \rightarrow (\overline{\phi} \vee \psi))} \text{M.P.} \quad \boxed{\Gamma \vdash (\overline{\phi} \wedge \overline{\psi})}$$

Алгоритм экспонициальный т.к. в случае 3 происходит раздвоение дерева.

Алгоритм сходится т.к. $\Delta(S)$ и $\delta(S)$ монотонно сходится к 0. К курсовой работе прилагается программа, в которой реализован алгоритм.

Список литературы

- [1] М.А.Тайцлин. Математические основания информатики. Тверь: ТвГУ, 2000. Стр. 103–109.