

1 Полные системы функций и теорема Поста

Пусть $\mathbf{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ — это множество всех булевых функций. В предыдущем разделе мы установили, что любую функцию из \mathbf{P} можно задать формулой над системой $F_B = \{\neg, \wedge, \vee\}$ (в качестве таких формул можно, например, взять соответствующие ДНФ и КНФ). Такие системы функций называются полными.

Определение 1. Система булевых функций F называется полной, если формулами над этой системой можно задать любую булеву функцию из \mathbf{P} .

Другим уже известным нам примером полной системы функций является система $F_J = \{0, 1, *, +\}$, позволяющая задать произвольную булеву функцию с помощью полинома Жегалкина. Разумеется, не всякая система является полной. Например, формулами над системой $\{\vee\}$ невозможно выразить функцию тождественно равную 0 (почему?). Наша цель в этом разделе — найти критерий, позволяющий по системе функций определять ее полноту.

Для исследования полноты полезно следующее понятие.

Определение 2. Замыкание $[F]$ системы функций F — это множество всех функций, которые можно задать с помощью формул над F .

Тогда определение полной системы можно переформулировать так: система F является полной тогда и только тогда, когда $[F] = \mathbf{P}$.

Замыкание обладает следующими основными свойствами.

Предложение 1.

- (1) $F \subseteq [F]$.
- (2) $[[F]] = [F]$.
- (3) $F \subseteq G \Rightarrow [F] \subseteq [G]$.
- (4) Если система F является полной и $F \subseteq [G]$, то и система G является полной.

Доказательств всех этих утверждений достаточно просто следует из определения замыкания. Например, справедливость пункта (2) следует из того, что всякая функция из $[F]$ задается некоторой формулой над F , а тогда всякая функция из $[[F]]$, которая задается суперпозицией функций из $[F]$, задается также некоторой формулой над F . Пункт (3) очевиден, а пункт (4) следует из (2) и (3):

$F \subseteq [G] \Rightarrow [F] \subseteq [[G]] \Rightarrow [F] \subseteq [G]$ и так как $[F] = \mathbf{P}$, то и $[G] = \mathbf{P}$.

Утверждение (4) позволяет устанавливать полноту некоторой системы, выражая с ее помощью все функции другой системы, полнота которой уже установлена.

Например, законы де Моргана позволяют выразить \vee через пару \neg, \wedge : $X \vee Y \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y)$ и \wedge — через пару \neg, \vee : $X \wedge Y \equiv \neg(\neg X \vee \neg Y)$. Поэтому каждая из систем $F_\wedge = \{\neg, \wedge\}$ и $F_\vee = \{\neg, \vee\}$ также является полной. Эквивалентности (7) и (8) позволяют выразить \vee через пару \neg, \rightarrow : $X \vee Y \equiv \neg X \rightarrow Y$. Следовательно, полной будет и система $F_\rightarrow = \{\neg, \rightarrow\}$.

Имеются ли полные системы из одной двуместной функции? Да. Рассмотрим систему, $\{\downarrow\}$, включающую лишь штрих Шеффера. Напомним, что $(X|Y) \equiv \neg(X \wedge Y)$. Тогда нетрудно проверить, что $\neg X \equiv (X|X)$ и $(X \wedge Y) \equiv ((X|Y)|(X|Y))$. Следовательно, система $\{\downarrow\}$ полная.

Задача 1. Докажите полноту системы $\{\downarrow\}$, включающей только стрелку Пирса.

Определение 3. Система функций $[F]$ называется замкнутой, если $F = [F]$.

Очевидно, что замкнутая система $[F]$, не содержащая всех функций из \mathbf{P} , не является полной.

Определим пять важных замкнутых систем.

Определение 4. (1,2) Функция $f^{(n)} \in \mathbf{P}$ сохраняет 0 (сохраняет 1), если $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ ($f(1, 1, \dots, 1) = 1$). Класс всех функций, сохраняющих 0, обозначим через \mathbf{S}_0 , а класс всех функций, сохраняющих 1, — через \mathbf{S}_1 .

(3) Функция $f^{(n)} \in \mathbf{P}$ называется самодвойственной, если для любого набора аргументов $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbf{B}^n$ имеет место равенство:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \neg f(\neg \sigma_1, \neg \sigma_2, \dots, \neg \sigma_n).$$

Таким образом, самодвойственные функции принимают на противоположных наборах противоположные значения. Класс всех самодвойственных функций обозначим через \mathbf{S} .

(4) Функция $f^{(n)} \in \mathbf{P}$ называется линейной, если она может быть задана линейным многочленом Жегалкина вида

$$\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$ при $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Класс всех линейных функций обозначим через **L**.

(5) Функция $f^{(n)} \in \mathbf{P}$ называется монотонной, если для любых двух наборов аргументов $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbf{B}^n$ и $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \in \mathbf{B}^n$ таких, что для всех $j \in [1, n]$ $\sigma_j \geq \rho_j$, имеет место неравенство

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \geq f(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n).$$

Рассмотрим для примера пять функций от 3-х переменных, которые представлены в следующей таблице.

Таблица 1: Таблица 1.

X_1	X_2	X_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1

Из определений непосредственно следует, что f_3, f_4 и f_5 сохраняют 0, т.е. входят в **S**₀, а функции f_2, f_3, f_4 и f_5 сохраняют 1, т.е. входят в **S**₁. Функция f_3 является самодвойственной, а f_2 – нет, так как $f_2(0, 0, 0) = f_2(1, 1, 1)$. Функция f_2 является линейной – она задается многочленом $X_1 + X_2 + 1$. Функция f_5 является монотонной, а f_3 – нет, так как $f_3(0, 1, 1) = 0 < 1 = f_3(1, 1, 0)$.

Задача 2. Определите принадлежность каждой из функций f_1, f_2, f_3, f_4 и f_5 каждому из классов **S**₀, **S**₁, **S**, **L** и **M**.

Теорема 1. Классы **S**₀, **S**₁, **S**, **L** и **M** являются замкнутыми.

Доказательство замкнутости всех указанных классов проводится индукцией по построению формул. Пусть $F \in \{\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}, \mathbf{L}, \mathbf{M}\}$ и $f \in [F]$ задается некоторой формулой над F . Нужно показать, что тогда $f \in F$.

Базис индукции, когда эта формула есть переменная X , очевиден.

Пусть $f(X_1, \dots, X_k) = g(f_1(X_1, \dots, X_k), \dots, f_n(X_1, \dots, X_k))$, и функции $g^{(n)}, f_1^{(k)}, \dots, f_n^{(k)}$ входят в F . Требуется показать, что тогда и f входит в F .

Для $F = \mathbf{S}_0$ это просто:

$$f(0, 0, \dots, 0) = g(f_1(0, \dots, 0), \dots, f_n(0, \dots, 0)) = g(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Аналогично проверяется случай $F = \mathbf{S}_1$.

Если $F = \mathbf{S}$ и $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ – произвольный набор аргументов, то

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) = \neg g(\neg f_1(\sigma_1, \dots, \sigma_k), \dots, \neg f_n(\sigma_1, \dots, \sigma_k)) = \neg g(\neg \neg f_1(\neg \sigma_1, \dots, \neg \sigma_k), \dots, \neg \neg f_n(\neg \sigma_1, \dots, \neg \sigma_k)) = \neg g(f_1(\neg \sigma_1, \dots, \neg \sigma_k), \dots, f_n(\neg \sigma_1, \dots, \neg \sigma_k)) = \neg f(\neg \sigma_1, \neg \sigma_2, \dots, \neg \sigma_k).$$

Следовательно, $f \in \mathbf{S}$.

Пусть $F = \mathbf{L}$. Так как тогда $g^{(n)}$ и все $f_i^{(k)}$ линейны, то существуют такие коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_{i0}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{ki}$ ($i = 1, \dots, n$) такие, что $g(X_1, \dots, X_n) = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$ и $f_i(X_1, \dots, X_k) = \beta_{i0} + \beta_{i1} X_1 + \dots + \beta_{ki} X_k$ ($i = 1, \dots, n$).

Подставив эти выражения в формулу для $f^{(k)}$, получим

$$f(X_1, \dots, X_k) = \alpha_0 + \alpha_1(\beta_{01} + \beta_{11} X_1 + \beta_{k1} X_k) + \dots + \alpha_n(\beta_{0n} + \beta_{1n} X_1 + \beta_{kn} X_k) = (\alpha_0 + \beta_{01} + \dots + \beta_{0n}) + (\alpha_1 \beta_{11} + \dots + \alpha_n \beta_{1n}) X_1 + \dots + (\alpha_1 \beta_{k1} + \dots + \alpha_n \beta_{kn}) X_k = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \dots + \gamma_k X_k,$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ – значения сумм констант в соответствующих скобках. Следовательно, $f \in \mathbf{L}$.

Наконец рассмотрим класс монотонных функций. Если $g^{(n)}$ и все $f_i^{(k)} \in \mathbf{M}$ и $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ и $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$ – два набора аргументов такие, что для всех $j \in [1, k]$ $\sigma_j \geq \rho_j$, то $f_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \geq f_i(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$ и

$f_i(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$ и поэтому
 $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) = g(f_1(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k), \dots, f_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)) \geq g(f_1(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k), \dots, f_n(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)) = f(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$.
 Таким образом, $f \in \mathbf{M}$. \square

Следствие 1.1. *Классы функций $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}, \mathbf{M}$ и \mathbf{L} не являются полными.*

Оказывается, что всякая система, не содержащаяся внутри одного из указанных пяти классов полна.

Теорема 2. (Теорема Поста о полноте) *Система булевых функций F является полной тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}, \mathbf{M}$ и \mathbf{L} , т.е. когда в ней имеется хотя бы одна функция, не сохраняющая 0, хотя бы одна функция, не сохраняющая 1, хотя бы одна несамодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы непосредственно следует из установленного выше Следствия 1.1.

Для доказательства *достаточности* предположим, что F содержит не сохраняющую 0 функцию $f_0^{(i)}$, не сохраняющую 1 функцию $f_1^{(j)}$, несамодвойственную функцию $f_s^{(k)}$, немонотонную функцию $f_m^{(r)}$ и нелинейную функцию $f_l^{(p)}$. Покажем, что с помощью этих функций всегда можно выразить функции одной из двух уже известных нам полных систем: $\{\neg, \wedge\}$ или $\{\neg, \vee\}$. Для этого установим, что:

- 1) используя f_0, f_1 и f_s , можно выразить константы 0 и 1;
- 2) с помощью констант из f_m можно получить отрицание \neg ;
- 3) с помощью констант и отрицания из f_l можно получить конъюнкцию \wedge или дизъюнкцию \vee .

Лемма 1. *Формулами, построенными из функций f_0, f_1 и f_s , можно задать константы 0 и 1.*

Доказательство. Рассмотрим два возможных значения f_0 на наборе аргументов, состоящем из одних единиц.

Случай 1. $f_0(1, \dots, 1) = 0$. Рассмотрим функцию $g(X)$, заданную формулой $f_0(X, \dots, X)$. Тогда, очевидно, $g(0) = f_0(0, \dots, 0) = 1$, а $g(1) = f_0(1, \dots, 1) = 0$. Таким образом, получили отрицание: $g(X) = \neg X$. Так как $f_s(k) \notin \mathbf{S}$, то для некоторого набора значений аргументов $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ имеет место равенство $f_s(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = f_s(\neg\sigma_1, \dots, \neg\sigma_k) = \text{const} \in \{0, 1\}$. Положим тогда $h(X) = f_s(X^{\sigma_1}, \dots, X^{\sigma_k})$ (такая подстановка переменной X^1 и ее отрицания X^0 возможна, так как мы уже получили отрицание). Тогда h — это константа const . Действительно, $h(1) = f_s(1^{\sigma_1}, \dots, 1^{\sigma_k}) = f_s(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = f_s(\neg\sigma_1, \dots, \neg\sigma_k) = f_s(0^{\sigma_1}, \dots, 0^{\sigma_k}) = h(0) = \text{const}$. Другая константа тогда задается формулой $\neg h(X)$.

Случай 2. $f_0(1, \dots, 1) = 1$. В этом случае формула $f_0(X, \dots, X)$ задает функцию $g(X)$, тождественно равную 1, а формула $f_1(g(X), \dots, g(X))$ задает функцию $h(X)$, тождественно равную 0. Действительно, $h(\sigma) = f_1(g(\sigma), \dots, g(\sigma)) = f_1(1, \dots, 1) = 0$ для любого $\sigma \in \{0, 1\}$. \square

Лемма 2. *Формулами, построенными из констант 0 и 1 и немонотонной функции $f_m^{(r)}$, можно задать отрицание \neg .*

Доказательство. Так как $f_m^{(r)}$ немонотонна, то имеются два разных набора аргументов $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ и $\tilde{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_r)$ таких, что для всех $j \in [1, r]$ $\sigma_j \geq \rho_j$ и при этом $f_m(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$, а $f_m(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = 1$. Пусть i_1, \dots, i_l — это все индексы, для которых $\sigma_{i_j} = 1 > \rho_{i_j} = 0$. Так как $\tilde{\sigma} \neq \tilde{\rho}$, то $l \geq 1$. Определим последовательность из $(l+1)$ -го набора аргументов $\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_l$ следующим образом: $\tilde{\rho}_0 = \tilde{\rho}$, а далее каждый набор $\tilde{\rho}_j$ получится из предыдущего $\tilde{\rho}_{j-1}$ заменой i_j -ой координаты с 0 на 1. Таким образом, последний из этих наборов $\tilde{\rho}_l$ совпадает с $\tilde{\sigma}$. Рассмотрим значения функции f_m на этих наборах: $f_m(\tilde{\rho}_0), f_m(\tilde{\rho}_1), \dots, f_m(\tilde{\rho}_l)$. Так как первое из них $f_m(\tilde{\rho}_0) = f_m(\tilde{\rho}) = 1$, а последнее $f_m(\tilde{\rho}_l) = f_m(\tilde{\sigma}) = 0$, то найдутся два соседних набора $\tilde{\rho}_{j-1}$ и $\tilde{\rho}_j$ таких, что $f_m(\tilde{\rho}_{j-1}) = 1$, а $f_m(\tilde{\rho}_j) = 0$. Они отличаются только i_j -ой координатой. Пусть $\tilde{\rho}_{j-1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i_j-1}, 0, \alpha_{i_j+1}, \dots, \alpha_r)$, а $\tilde{\rho}_j = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i_j-1}, 1, \alpha_{i_j+1}, \dots, \alpha_r)$. Положим тогда $g(X) = f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_j-1}, X, \alpha_{i_j+1}, \dots, \alpha_r)$. Тогда $g(0) = f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_j-1}, 0, \alpha_{i_j+1}, \dots, \alpha_r) = 1$, а $g(1) = f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_j-1}, 1, \alpha_{i_j+1}, \dots, \alpha_r) = 0$. Следовательно, $g(X) = \neg X$. \square

Лемма 3. *Формулами, построенными из констант 0 и 1, отрицания \neg и нелинейной функции $f_l^{(p)}$, можно задать дизъюнкцию \vee или конъюнкцию \wedge .*

Доказательство. Так как $f_l^{(p)} \notin \mathbf{L}$, то в представляющий ее многочлен Жегалкина обязательно входит слагаемое вида $X_{i_1} * X_{i_2} * \dots * X_{i_k}$ ($k \geq 2$). Выберем самое короткое из таких слагаемых и рассмотрим функцию $g_1(X_{i_1}, X_{i_2}) = f_l(\sigma_1, \dots, \sigma_{i_1-1}, X_{i_1}, \sigma_{i_1+1}, \dots, \sigma_{i_2-1}, X_{i_2}, \sigma_{i_2+1}, \dots, \sigma_p)$, где $\sigma_j = 1$ при $j \in \{i_3, \dots, i_k\}$ и $\sigma_j = 0$ в остальных случаях. При такой подстановке констант многочлен Жегалкина для $g(X_1, X_2) = g_1(X_1, X_2)$ имеет вид: $\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + X_1 * X_2$, где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}$. Таким образом, всего возможно 8 вариантов. Рассмотрим 4 из них в случае, когда $\alpha_0 = 0$. Тогда

- 1) при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$ получаем, что $g(X_1, X_2) \equiv X_1 \wedge X_2$;
- 2) при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 1$ получаем, что $g(\neg X_1, X_2) \equiv X_2 + \neg X_1 * X_2 \equiv (1 + \neg X_1) * X_2 \equiv X_1 \wedge X_2$;
- 3) при $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 0$ получаем, что $g(X_1, \neg X_2) \equiv X_1 + X_1 * \neg X_2 \equiv X_1 * (1 + \neg X_2) \equiv X_1 \wedge X_2$;
- 4) при $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 1$ имеем $g(X_1, X_2) \equiv X_1 + X_2 + X_1 * X_2 \equiv X_1 \vee X_2$.

Остальные 4 варианта в случае, когда $\alpha_0 = 1$, получаются как отрицания соответствующих вариантов для $\alpha_0 = 0$.

□

Из приведенных трех лемм, очевидно, следует достаточность условия теоремы.

□

Рассмотрим следующий набор функций.

Таблица 2: Таблица 2.

X_1	X_2	X_3	f	g	h
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Функция f , очевидно, не сохраняет 0 и 1, но является самодвойственной. Функция $g(X_1, X_2, X_3) = 1 + X_1 + X_2 + X_1 * X_3 + X_1 * X_2 * X_3$ является несамодвойственной, немонокотонной и нелинейной. По лемме 1 получаем, что $f(X, X, X) = \neg X$, функция $g_1(X) = g(X, X, X) \equiv 1$, а функция $g_0(X) = \neg g_1(X) \equiv 0$. Подставив $X_2 = 0$ в g получим $g_3(X_1, X_3) = g(X_1, 0, X_3) = 1 + X_1 + X_1 * X_3$. Тогда $h(X_1, X_2) = \neg g_3(X_1, \neg X_2) = \neg(1 + X_1 + X_1 * \neg X_2) \equiv \neg(1 + X_1 * (1 + \neg X_2)) \equiv X_1 * X_2$. Таким образом, мы с помощью f и g сумели выразить обе функции полной системы $\{\neg, \wedge\}$ и, следовательно, система функций $\{f, g\}$ полная.

Задача 3. Используя результаты задачи 2, определите, какие из троек функций, представленных в таблице 1, являются полными системами. Имеются ли среди них полные системы из двух функций? Из одной функции?

Задача 4. Проверьте полноту системы функций $\{g, h\}$, представленных в таблице 2. Если она полна, выразите с помощью этих функций обе константы, отрицание \neg и импликацию \rightarrow .

Задача 5. Докажите, что система $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ не является полной. Можно ли ее сделать полной, добавив некоторую константу?

Задача 6. Выразите функции $\{0, 1, \vee, \wedge, \sim\}$ с помощью формул, построенных из функций полной системы $\{\neg, \rightarrow\}$.

Определение 5. Полная система функций называется **минимальной** полной системой или **базисом**, если после удаления из нее любой функции она перестает быть полной.

Например, система $\{\neg, \wedge, \vee\}$ не является базисом, а каждая из систем $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ является. Мы уже знаем, что имеются полные системы, состоящие из одной функции (например, система $\{\downarrow\}$). Они, конечно, являются базисами. Имеются и полные системы, включающие 3 функции, например система $\{1, *, +\}$, на которой основаны многочлены Жегалкина (отметим, что константу 0 можно выразить как $1+1$). Из теоремы Поста следует, что никакая минимальная система не содержит более 5 функций. Оказывается, что для полноты всегда достаточно

четырёх функций.

Теорема 3. *Во всяком базисе F содержится не более 4-х функций.*

Доказательство. Действительно, по теореме Поста в базисе F имеется функция $f_0^{(i)} \notin \mathbf{S}_0$. Поэтому $f_0(0, 0, \dots, 0) = 1$. Если она хотя бы на одном наборе значений аргументов принимает значение 0, то она немонотонна, т.е. $f_0^{(i)} \notin \mathbf{M}$. В противном случае, f_0 на всех наборах значений аргументов равна 1. Но тогда она несамоудовлетворительна, так как $f_0(0, 0, \dots, 0) = 1 = f_0(1, 1, \dots, 1)$. Во всех случаях $f_0 \notin \mathbf{M}$ или $f_0 \notin \mathbf{S}$ и, следовательно, в системе F содержится не более 4-х функций.

□

Может быть, в минимальной системе можно обойтись тремя функциями? Это не так. Рассмотрим, например, систему $F^{(4)} = \{0, 1, X \wedge Y, X + Y + Z\}$. В этой системе, $0 \notin \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}$, $1 \notin \mathbf{S}_0$, $X + Y + Z \notin \mathbf{M}$, $X \wedge Y \notin \mathbf{L}$. Легко проверить, что при удалении любой из функций система $F^{(4)}$ перестает быть полной. Таким образом, теорема 3 дает наилучшую верхнюю оценку числа функций в базисе.

Задача 7. *Определите количество функций из \mathcal{P}_n , принадлежащих каждому из классов $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}$ и \mathbf{L} .*

Задача 8. *Докажите, что число монотонных функций в \mathcal{P}_n не меньше $2^{C_n^{[n/2]}}$.*

Задача 9. *Найдите все базисы, которые можно получить, удаляя функции из системы $\{0, 1, \wedge, \vee, \rightarrow\}$.*

Замечание. Е. Пост в работах, опубликованных в 1921 и 1941 гг. установил не только критерий полноты, но и описал структуру всех замкнутых классов функций в \mathbf{P} . Он показал, что число таких классов счетно и что в каждом из них имеется собственный конечный базис.