

Материалы к экзамену по "Дискретной математике"

(1-ый семестр)

Список основных понятий

1. Булевы формулы.
2. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.
3. Совершенные ДНФ и КНФ.
4. Сокращенная дизъюнктивная нормальная форма.
5. Многочлен Жегалкина.
6. Замкнутый класс булевых функций; полная система.
7. Классы функций, сохраняющих 0 и 1, линейные, самодвойственные, монотонные функции.
8. Отношение эквивалентности, классы эквивалентности.
9. Ориентированные и неориентированные графы и их представления: графическое, матрицей смежности, матрицей инцидентности, списками смежности.
10. Граф достижимости (транзитивного замыкания) для заданного ориентированного графа.
11. Компоненты сильной связности и базы ориентированного графа.
12. Двудольные (бихроматические) графы.
13. Ориентированные и неориентированные деревья.
14. Прямой и обратный обходы деревьев.
15. Минимальное остовное дерево графа.
16. Четные графы. Эйлеровы циклы.
17. Обход ориентированного графа в глубину.
18. Представление булевых функций схемами из функциональных элементов.
19. Представление булевых функций упорядоченными бинарными диаграммами решений.

Типы стандартных задач

1. Построить булеву формулу и задаваемую ею булеву функцию по условию на русском языке.
2. По таблице булевой функции построить ее КНФ, ДНФ, сокращенную ДНФ, многочлен Жегалкина.
3. Используя основные эквивалентности, построить по булевой формуле эквивалентную сокращенную ДНФ (или многочлен Жегалкина).
4. Используя основные эквивалентности, проверить эквивалентность двух булевых формул.
5. По заданной системе булевых функций определить (используя теорему Поста) ее полноту.
6. Выразить формулами над заданной полной системой булевых функций константы, отрицание и дизъюнкцию или конъюнкцию.
7. По одному из представлений графа построить все другие его представления.
8. По заданному ориентированному графу вычислить его матрицу достижимости и граф достижимости.

9. По заданному ориентированному графу определить его компоненты сильной связности и все его базы.
10. По заданному неориентированному графу определить является ли он двудольным. Если нет, то какое наименьшее число ребер следует удалить, чтобы граф стал двудольным.
11. По заданному неориентированному графу определить является ли он четным. Если нет, то какое наименьшее число ребер следует удалить, чтобы граф стал четным. В четном графе построить Эйлеров цикл.
12. Для заданного нагруженного неориентированного графа построить минимальное остовное дерево методом Крускала.
13. Для заданного нагруженного ориентированного графа и некоторой его вершины найти с помощью алгоритма Дейкстры длину кратчайших путей от нее до остальных вершин и построить эти пути.
14. Для заданного неориентированного графа построить его обход методом "в глубину".
15. По заданной формуле построить представляющее ее дерево и его прямой и обратный обходы.
16. По булевой функции построить реализующую ее схему из функциональных элементов. По схеме из функциональных элементов определить вычисляемую ею функцию.
17. По булевой функции построить реализующую ее упорядоченную бинарную диаграмму решений. По упорядоченной бинарной диаграмме решений определить вычисляемую ею булеву функцию.

Задачи по графам

Задача 1. Докажите, что неориентированный связный граф остается связным после удаления некоторого ребра \leftrightarrow это ребро принадлежит некоторому циклу.

Задача 2. Докажите, что неор. связный граф с n вершинами

- а) содержит не менее $n - 1$ ребер,
- б) если содержит больше $n - 1$ ребер, то имеет по крайней мере хотя один цикл.

Задача 3. Докажите, что в любой группе из 6 человек есть трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых.

Задача 4. Докажите, что неориентированный граф $G = (V, E)$ связан \leftrightarrow для каждого разбиения $V = V_1 \cup V_2$ с непустыми V_1 и V_2 существует ребро, соединяющее V_1 с V_2 .

Задача 5. Докажите, что, если в неор. графе без петель имеется ровно две вершины нечетной степени, то они связаны путем.

Задача 6. Пусть $G = (V, E)$ неор. граф с $|E| < |V| - 1$. Докажите, что тогда G несвязный граф.

Задача 7. Докажите, что в связном неориентированном графе любые два простых пути максимальной длины имеют общую вершину.

Задача 8. Пусть неориентированный граф без петель $G = (V, E)$ имеет k компонент связности. Доказать, что тогда

$$|E| \leq (|V| - k)(|V| - k + 1)/2.$$

Задача 9. Пусть $G = (V, E)$ — неориентированное дерево и $v \in V$ — произвольная вершина. Докажите, что если для каждого ребра $(u, w) \in E$ выбрать ориентацию от u к w , если им заканчивается путь из v в w , и ориентацию от w к u , если им заканчивается путь из v в u , то полученный ориентированный граф будет ориентированным деревом с корнем v . Используйте это утверждение для доказательства следующего факта: если в неориентированном дереве $G = (V, E)$ имеется вершина степени $d > 1$, то в нем имеется по крайней мере d вершин степени 1.

Задача 10. Ориентированное дерево называется двоичным, если степень (исхода) у каждой его вершины не больше двух. Докажите по индукции, что в любом двоичном дереве число вершин степени 2 на единицу меньше числа листьев.

Задача 11. Пусть $T = (V, E)$ — это ориентированное дерево с корнем $v_0 \in V$. определим для каждой вершины $v \in V$ подграф $T_v = (V_v, E_v)$ следующим образом: V_v — это множество вершин, достижимых из v в T , а E_v — это множество ребер из E , оба конца которых входят в V_v . Доказать, что

- а) T_v является деревом с корнем v ;
- б) если две разные вершины v и u имеют одинаковую глубину, то деревья T_v и T_u не пересекаются.

Задача 12. Докажите, что если в связном неориентированном графе число вершин равно числу ребер, то можно выбросить одно из ребер так, что после этого граф станет деревом.

Задача 13. Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный граф с $n > 1$ вершинами. Докажите, что G является (ориентированным) деревом тогда и только тогда, когда в G нет циклов, имеется одна вершина r , в которую не входят ребра, а в каждую из остальных вершин $v \in V \setminus \{r\}$ входит ровно одно ребро.

Задача 14. Пусть $D = (V, T)$ — это остовное дерево, построенное алгоритмом обхода "в глубину" для графа $G = (V, E)$. Докажите, что для каждого ребра (u, v) из E , не попавшего в T (такие ребра называются обратными), либо u является предком v в D , либо v является предком u в D .

Задача 15. Пусть $S = (V, T)$ — остовное дерево наименьшей стоимости, построенное алгоритмом МИНОД для нагруженного неориентированного графа $G = (V, E)$ с n вершинами. Пусть $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{n-1}$ — это последовательность длин ребер из T , упорядоченных по возрастанию. Пусть S' — произвольное остовное дерево для G с длинами ребер $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{n-1}$. Показать, что $c_i \leq d_i$ для всех $i: 1 \leq i \leq n-1$.

Задача 16. Пусть e — ребро максимального веса в некотором цикле графа $G = (V, E)$. Докажите, что существует минимальный остов графа $G' = (V, E \setminus \{e\})$, который является также минимальным остовом графа G .

Задача 17. Где в доказательстве правильности алгоритма Дейкстры используется неотрицательность весов ребер? Приведите пример графа (с отрицательными весами), для которого алгоритм Дейкстры дает неверный ответ.

Задача 18. Докажите, что на каждом шаге алгоритма Дейкстры кратчайший путь из исходной вершины в любую вершину множества S проходит только через вершины множества S .

Задача 19. Сколько раз может меняться для одной вершины v значение $D[v]$ в ходе работы алгоритма Дейкстры для графа с 5 вершинами. Привести пример на каждый возможный случай.

Задача 20. Доказать, что на каждом шаге алгоритма Дейкстры для любой вершины $x \in S$ и любой вершины $y \in V \setminus S$ выполнено неравенство $D[x] \leq D[y]$.