

Модуль 1

Вариант 1

1. Детектив Ш. Холмс подозревает в совершении преступления трех лиц: A, B и C . Он установил, что

- а) если B преступник, то и C является преступником;
- б) кто-то один из пары A, C является преступником (но не оба вместе);
- в) если C не преступник, то и A не преступник.

Опишите знания Ш. Холмса в виде булевой формулы и постройте таблицу ее значений. Может ли он сделать вывод, что C является преступником? Можно ли достоверно утверждать, что преступник действовал в одиночку?

2. Наборы значений булевой функции от трех аргументов упорядочены лексикографически. Ее значения задаются следующей последовательностью 8 нулей и единиц:

$$f = (0100\ 1111).$$

Найти задающие эту функцию сокращенную дизъюнктивную нормальную форму и многочлен Жегалкина (методом неопределенных коэффициентов).

3. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные сокращенные ДНФ и многочлены Жегалкина и доказать эквивалентность следующих формул:

$$\Phi = (\neg(X \rightarrow (\neg Y \rightarrow (X \wedge \neg Z))) \wedge (Z \vee \neg(X \wedge Y))), \quad \Psi = ((X \wedge Z) + (X \wedge Y \wedge Z)).$$

4. Длиной многочлена Жегалкина называется число его слагаемых (элементарных конъюнкций). Например, $p(X_1, X_2) = 1 + X_1 + X_1 * X_2$ имеет длину 3. Сколько существует различных многочленов Жегалкина от n переменных длины k , которые обращаются в 0 на наборах $(0, 0, \dots, 0)$ и $(1, 1, \dots, 1)$, состоящих из одних нулей и единиц, соответственно? Привести доказательство.

Вариант 2

1. Программист Петр использовал в своей программе три целочисленные переменные x, y и z . В определенном месте программы он поместил условный оператор:

IF $(x * y \geq 0) OR (x * z \geq 0)$ THEN $x = 1$ ELSE $x = 2$;

Проанализировав свою программу Петр установил, что перед выполнением этого оператора выполнены следующие условия:

- а) если $z < 0$, то $x < 0$ или $y \geq 0$;
- б) $x \geq 0$ или $y < 0$;
- в) если $y < 0$, то хотя бы одна из переменных x, z отрицательна, но не обе вместе.

Опишите знания Петра в виде булевой формулы. Может ли он оптимизировать программу, заменив указанный условный оператор на присвоение $x = 1$ или на присвоение $x = 2$? Если "да", то на какое?

2. Наборы значений булевой функции от трех аргументов упорядочены лексикографически. Ее значения задаются следующей последовательностью 8 нулей и единиц:

$$f = (1001\ 0110).$$

Найти задающие эту функцию совершенную КНФ и сокращенную ДНФ.

3. Используя основные эквивалентности, найти эквивалентные КНФ и сокращенные ДНФ и доказать эквивалентность следующих формул:

$$\Phi = (((\neg X \wedge \neg Y) \rightarrow \neg Z) \wedge (X \rightarrow Y)), \quad \Psi = (\neg Y \rightarrow (\neg X \wedge \neg Z)).$$

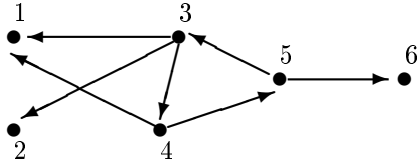
4. Длиной многочлена Жегалкина называется число его слагаемых (элементарных конъюнкций). Например, $p(X_1, X_2) = 1 + X_1 + X_1 * X_2$ имеет длину 3. Показать, что для всякого k ($k \leq 2^n$) существует многочлен Жегалкина $P(X_1, \dots, X_n)$ длины, не большей, чем n , для которого число единиц $|N_P^+| = k$. (Указание: используйте индукцию по n .)

Модуль 2

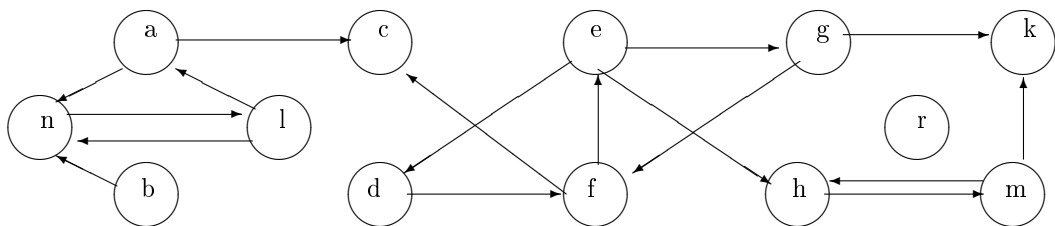
Вариант 1

1. Используя теорему Поста, выяснить, полна ли следующая система функций:
 $\{(10010110), (01111100), (00010011)\}$.

2. Построить для заданного ориентированного графа $G = (V, E)$ его матрицу смежности A_G , матрицу инцидентности B_G и списки смежности. Вычислить матрицу достижимости A_{G^*} и построить соответствующий граф достижимости G^* .



3. Определить для заданного ориентированного графа G его компоненты сильной связности, порядок (отношение достижимости) на них и все базы графа.



4. Определить является ли заданный неориентированный граф $G = (V, E)$ двудольным. Если он не двудольный, то каково минимальное число ребер, которые нужно из него удалить, чтобы он стал двудольным? Приведите обоснование ответа.

$V = \{a, b, c, e, f, g, h, k, m, n\}$, $E = \{(a, h), (a, n), (a, k), (b, k), (b, f), (b, m), (c, k), (c, h), (e, f), (e, g), (f, a), (f, m), (g, m), (m, n)\}$.

5. Найти число булевых функций от n переменных, являющихся одновременно самодвойственными и линейными. Привести доказательство.

Модуль 3

Вариант 1

1. Построить для заданного нагруженного неориентированного графа $G = (V, E)$ минимальное остовное дерево.
 $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $E = \{(a, b; 12), (a, c; 9), (a, f; 25), (a, g; 7), (b, d; 17), (b, f; 27), (b, g; 10), (c, d; 15), (c, g; 3), (d, e; 5), (d, f; 20), (e, f; 25)\}$,
(здесь каждая скобка $(u, v; d)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его "вес" $c(u, v) = d$).

2. Определить для заданного нагруженного графа $G = (V = \{a, b, c, d, e, f\}, E)$ и выделенной вершины $a \in V$ длины кратчайших путей из этой вершины в остальные вершины G и построить дерево этих путей.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & 25 & 5 & 26 & 53 & 75 \\ 12 & 0 & \infty & \infty & 120 & 40 \\ \infty & 15 & 0 & 20 & 47 & 60 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 30 & 45 \\ \infty & \infty & 75 & 20 & 0 & 20 \\ 40 & 15 & 15 & 26 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

3. Обойти (занумеровать) вершины заданного неориентированного графа G с помощью алгоритма обхода "в глубину" и построить дерево этого обхода. Начать обход с вершины v_1 .
 $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_8), (v_2, v_8), (v_2, v_9), (v_2, v_{11}), (v_3, v_4), (v_6, v_3), (v_3, v_7), (v_6, v_7), (v_{10}, v_9)\}$.

4. Определить по неориентированному графу $G = (V, E)$ четный ли он. Если он не является четным, то удалить из него минимальное число ребер, чтобы он стал четным. Построить в исходном или в получившемся после удаления ребер четном графе Эйлера цикл.
 $V = \{a, b, c, e, f, g, h, k, m, n\}$, $E = \{(a, c), (a, h), (a, m), (a, k), (b, c), (b, k), (b, f), (b, m), (c, k), (c, m), (e, f), (e, g), (f, k), (f, n), (g, m), (g, h), (h, k), (h, m), (k, n)\}$.

5. Пусть $D = (V, T)$ – это остовное дерево, построенное алгоритмом обхода "в глубину" для графа $G = (V, E)$. Докажите, что для каждого ребра (u, v) из E , не попавшего в T (такие ребра называются *обратными*), либо u является предком v в D , либо v является предком u в D .

Вариант 2

1. Построить для заданного нагруженного неориентированного графа $G = (V, E)$ минимальное остовное дерево.
 $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$, $E = \{(a, b; 12), (a, c; 9), (a, f; 25), (a, h; 7), (b, d; 13), (b, f; 27), (b, g; 10), (c, d; 15), (c, g; 3), (c, k; 10), (d, e; 5), (d, f; 20), (e, f; 25), (k, h; 12)\}$,
(здесь каждая скобка $(u, v; d)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его "вес" $c(u, v) = d$).

2. Определить для заданного нагруженного графа $G = (V, E)$ и выделенной вершины $a \in V$ длины кратчайших путей из этой вершины в остальные вершины G и построить дерево этих путей.

$V = \{a, b, c, d, e, f\}$, $E = \{(a, b; 154), (a, c; 17), (a, d; 214), (a, e; 63), (b, d; 25), (c, e; 33), (c, d; 192), (c, b; 123), (d, f; 5), (e, f; 140), (d, e; 10)\}$,
(здесь каждая скобка $(u, v; D)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его "вес" $c(u, v) = D$).

3. Обойти (занумеровать) вершины заданного неориентированного графа G с помощью алгоритма обхода "в глубину" и построить дерево этого обхода. Начать обход с вершины v_3 .
 $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_1, v_6), (v_2, v_6), (v_3, v_4), (v_4, v_7), (v_5, v_3), (v_3, v_7), (v_8, v_3), (v_3, v_{11}), (v_3, v_6), (v_8, v_7), (v_8, v_9), (v_9, v_{10})\}$.

4. Построить схему из функциональных элементов в базисе $F = \{\wedge, \vee, \neg\}$, реализующую функ-

цию четности: $P(x_1, x_2, x_3) = 1 \Leftrightarrow$ число единиц среди аргументов четно (т.е. $(x_1 + x_2 + x_3)$ — четное число). Определить глубину получившейся схемы и ее сложность (число функциональных элементов).

5. Где в доказательстве правильности алгоритма Дейкстры используется неотрицательность весов ребер? Приведите пример графа (с отрицательными весами), для которого алгоритм Дейкстры дает неверный ответ.

Вариант 3

1. Построить для заданного нагруженного неориентированного графа $G = (V, E)$ минимальное остовное дерево.

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$, $E = \{(a, b; 10), (a, c; 19), (a, k; 25), (a, g; 7), (b, d; 17), (b, f; 27), (b, g; 10), (c, d; 15), (c, g; 3), (f, h; 9), (d, e; 5), (d, f; 20), (e, f; 20), (h, k; 15)\}$,
(здесь каждая скобка $(u, v; d)$ задает ребро $(u, v) \in E$ и его "вес" $c(u, v) = d$).

2. Определить для заданного нагруженного графа $G = (V, E)$ и выделенной вершины $A \in V$ длины кратчайших путей из этой вершины в остальные вершины G и построить дерево этих путей.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ 0 & 138 & 271 & 126 & 110 & \infty \\ 34 & 0 & 81 & 75 & 5 & \infty \\ \infty & 9 & 0 & 20 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 30 & 15 \\ \infty & 20 & 5 & 12 & 0 & 30 \\ 10 & \infty & 15 & 20 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

3. Обойти (занумеровать) вершины заданного неориентированного графа G с помощью алгоритма обхода "в глубину" и построить дерево этого обхода.

$G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_4, v_8), (v_2, v_9), (v_2, v_{11}), (v_3, v_4), (v_6, v_3), (v_3, v_7), (v_6, v_7), (v_{10}, v_9)\}$.

4. Построить упорядоченную бинарную диаграмму решений, реализующую функцию: $P(x_1, x_2, x_3) = 1 \Leftrightarrow$ число единиц среди аргументов нечетно (т.е. $(x_1 + x_2 + x_3)$ — нечетное число). Определите сложность (число вершин, помеченных переменными) в получившейся диаграмме ("хорошее" решение - диаграмма с 5 такими вершинами).

5. Неориентированный граф $G = (V, E)$ называется связным, если для любой пары вершин из V имеется соединяющий их путь. Докажите, что в связном неориентированном графе любые два простых пути максимальной длины имеют общую вершину.